PART2 累乗根

要点 ① 累乗根

正の整数 n に対し，n 乗して a になる数，すなわち

方程式 $x^n = a$ の解 x

を，a の「　　　」といい，a の 2 乗根(平方根)，3 乗根(立方根)，4 乗根，……を，a の「　　　」という。

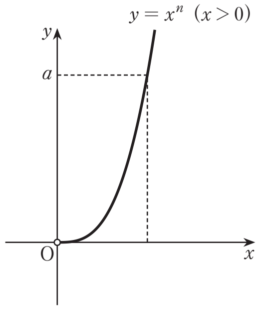
例 $2^3 = 8$ より，2 は 8 の「　　　」

$(-2)^5 = -32$ より，-2 は -32 の「　　　」

$2^4 = 16$，$(-2)^4 = 16$ より，2 と -2 はともに 16 の「　　　」

以下では，正の数 a の n 乗根のうち，「正であるもの」について考える。
つまり，方程式 $x^n = a$ $(a > 0)$ の解のうち，$x > 0$ であるものを考える。

関数 $y = x^n$ $(x > 0)$ のグラフは右図のようになる。
このグラフで，$y = a$ を満たす x が，a の正の n 乗根であり，
グラフよりそれはただ 1 つである。
この a の正の n 乗根を「　　」と表す。



例 $\sqrt[3]{8}$ は「3 乗して 8 になる数のうち，正のもの」

$8 = \ ^3$ より，それは　である。　　よって　$\sqrt[3]{8} =$

※$\sqrt[2]{a}$ はこれまで通り $\sqrt{a}$ と表す。また，$\sqrt[n]{0} = 0$ と定める。

$a > 0$，n が正の整数のとき，$\sqrt[n]{a}$ は

$$(\sqrt[n]{a})^n = a,\ \sqrt[n]{a} > 0$$

を満たすただ 1 つの数である。また

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

が成り立つ。

例 $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} =$

要点 ② 累乗根の性質

累乗根について，次の性質が成り立つ。

累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p が正の整数のとき

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

2 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

5 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

（**1** の証明）

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\quad=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=$$

$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{b}>0$ であるから，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$

よって，$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ は，n 乗して ab となる正の数，すなわち ab の正の n 乗根である。

したがって　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

例 $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{2\times3}=\sqrt[5]{6}$

$\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{10}{2}}=\sqrt[4]{5}$

$(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

$\sqrt{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[2\times3]{7}=\sqrt[6]{7}$

$\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3\times2]{3^{1\times2}}=\sqrt[3]{3}$

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　(5) $(\sqrt[6]{9})^3$

Point Pickup

累乗根とその性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p が正の整数のとき

$(\sqrt[n]{a})^n=a$，$\sqrt[n]{a}>0$，$\sqrt[n]{a^n}=a$

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　**2** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　**3** $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　**5** $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

第 12 講 PART2 確認問題

次の計算をせよ。

1 $\sqrt[3]{54}=\boxed{ア}\sqrt[\boxed{イ}]{\boxed{ウ}}$

2 $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\boxed{エ}$

3 $\dfrac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\boxed{オ}$

4 $\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\boxed{カ}$

5 $(\sqrt[6]{25})^3=\boxed{キ}$

PART2 累乗根

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}$　(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$　(5) $(\sqrt[6]{9})^3$

[解答]

(1) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{2^3\times 3}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125}=\sqrt[4]{5\times 125}=\sqrt[4]{5^4}=5$

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\dfrac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3\times 2]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

(5) $(\sqrt[6]{9})^3=(\sqrt[6]{3^2})^3=(\sqrt[3\times 2]{3^{1\times 2}})^3=(\sqrt[3]{3})^3=3$

第12講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3，ウ：2

[解説]

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{3^3\times 2}$$
$$=\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt[3]{2}\quad\text{[A]}$$
$$=3\sqrt[3]{2}$$

[A]　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

2

[正解] エ：2

[解説]

$$\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\times 8}\quad\text{[B]}$$
$$=\sqrt[4]{2^4}$$
$$=2$$

[B]　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

3

[正解] オ：2

[解説]

$$\frac{\sqrt[3]{40}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{40}{5}}\quad\text{[C]}$$
$$=\sqrt[3]{8}$$
$$=\sqrt[3]{2^3}$$
$$=2$$

[C]　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

4

[正解] カ：3

[解説]

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[3\times 2]{729}\quad\text{[D]}$$
$$=\sqrt[6]{3^6}$$
$$=3$$

[D]　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$
$\sqrt[n]{a^n}=a$

5 **[正解]** キ：5

[解説]

$$\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3$$
$$=\left(\sqrt[3\times 2]{5^{1\times 2}}\right)^3 \quad \text{[E]}$$
$$=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$$
$$=5$$

[E]　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$